Fuerzas y torques en los campos magnéticos

10.1 FUERZA MAGNETICA SOBRE LAS PARTICULAS

Una partícula cargada *en movimiento* experimenta en un campo magnético una fuerza en ángulo recto respecto de su velocidad, con una magnitud proporcional a la carga, la velocidad y la densidad de flujo magnético. La expresión completa está dada por el producto cruz.

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{U} \times \mathbf{B}$$

Por consiguiente, la dirección de una partícula en movimiento puede ser cambiada por un campo magnético. La magnitud de la velocidad, U, y por consiguiente la energía cinética, permanecen iguales. Esto contrasta con los campos eléctricos, en los que la fuerza $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$ efectúa trabajo sobre las partículas y cambia así su energía cinética.

Si el campo $\mathbf{B}$ es uniforme en una región y la partícula tiene una velocidad inicial normal al campo, la trayectoria de la partícula es un círculo de un radio r. La fuerza del campo es de magnitud $F = |Q|\, UB$ y se dirige hacia el centro del círculo. La aceleración centrípeta es de magnitud $\omega^2 r = U^2/r$. Entonces, por la segunda ley de Newton,

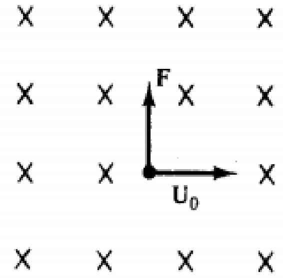
$$|Q|UB = m\frac{U^2}{r} \qquad \text{ó} \qquad r = \frac{mU}{|Q|B}$$

Obsérvese que r es una medida del momento lineal de la partícula, mU.

EJEMPLO 1: Halle la fuerza sobre una partícula de masa 1.70×10^{-27} kg y carga 1.6×10^{-19} C si entra a un campo $B = 5$ mT con una velocidad inicial de 83.5 km/s.

A menos que las direcciones de $\mathbf{B}$ y $\mathbf{U}_0$ sean conocidas, ($\mathbf{U}_0$ = velocidad inicial de la partícula), la fuerza no puede ser calculada. Suponiendo que $\mathbf{U}_0$ y $\mathbf{B}$ sean perpendiculares, como se muestra en la figura 10-1,

$$\begin{aligned} F &= |Q|UB \\ &= (1.60 \times 10^{-19})(83.5 \times 10^3)(5 \times 10^{-3}) \\ &= 6.68 \times 10^{-17}\ \text{N} \end{aligned}$$



(B entra en la página)

Fig. 10-1

EJEMPLO 2: Para la partícula del ejemplo 1, halle el radio de la trayectoria circular y el tiempo requerido para una revolución.

$$r = \frac{mU}{|Q|B} = \frac{(1.70 \times 10^{-27})(83.5 \times 10^3)}{(1.60 \times 10^{-19})(5 \times 10^{-3})} = 0.177\ \text{m}$$

$$T = \frac{2\pi r}{U} = 13.3\ \mu\text{s}$$

10.2 CAMPOS ELECTRICOS Y MAGNETICOS COMBINADOS

Cuando los dos campos se hallan presentes al mismo tiempo en una región, la fuerza sobre una partícula está dada por

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B})$$

Esta fuerza, junto con las condiciones iniciales, determina la trayectoria de la partícula.

EJEMPLO 3: Una región contiene una densidad de flujo magnético $\mathbf{B} = 5.0 \times 10^{-4}\mathbf{a}_z$ T y un campo eléctrico $\mathbf{E} = 5.0\,\mathbf{a}_z$ V/m. Un protón ($Q_p = 1.602 \times 10^{-19}$ C, $m_p = 1.673 \times 10^{-27}$ kg) ingresa a los campos en el origen con una velocidad inicial $\mathbf{U}_0 = 2.5 \times 10^5\mathbf{a}_x$ m/s. Describa el movimiento del protón y de su posición después de 3 revoluciones completas.

La fuerza inicial sobre la partícula es

$$\mathbf{F}_0 = Q(\mathbf{E} + \mathbf{U}_0 \times \mathbf{B}) = Q_p(E\,\mathbf{a}_z - U_0\,B\,\mathbf{a}_y)$$

La componente z (componente eléctrica) de la fuerza es constante, y produce una aceleración constante en la dirección z. De esta manera la ecuación de movimiento en la dirección z es

$$z = \tfrac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{Q_p E}{m_p}\right)t^2$$

La otra componente (magnética), que cambia a $-Q_p U B\mathbf{a}_r$, produce un movimiento circular perpendicular al eje z, con período.

$$T = \frac{2\pi r}{U} = \frac{2\pi m_p}{Q_p B}$$

El movimiento resultante es helicoidal, como se muestra en la figura 10-2.

Después de 3 revoluciones $x = y = 0$ y

$$z = \frac{1}{2}\left(\frac{Q_p E}{m_p}\right)(3T)^2 = \frac{18\pi^2 E m_p}{Q_p B^2} = 37.0 \text{ m}$$

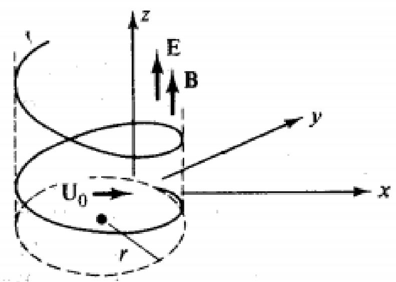


Fig. 10-2

10.3 FUERZA MAGNETICA SOBRE UN ELEMENTO DE CORRIENTE

Una situación que se da frecuentemente es la de un conductor que transporta corriente en un campo magnético externo. Como $I = dQ/dt$, la ecuación de fuerza diferencial puede escribirse

$$d\mathbf{F} = dQ(\mathbf{U} \times \mathbf{B}) = (I\,dt)(\mathbf{U} \times \mathbf{B}) = I(d\mathbf{l} \times \mathbf{B})$$

donde $d\mathbf{l} = \mathbf{U}\,dt$ es la longitud del elemento en la dirección de la corriente convencional I. Si el conductor es recto y el campo es constante a lo largo de él, la fuerza diferencial puede integrarse para dar

$$F = ILB\operatorname{sen}\theta$$

La fuerza magnética se ejerce realmente sobre los electrones que conforman la corriente I. Sin embargo, como los electrones están confinados al conductor, la fuerza se transfiere efectivamente a la estructura pesada. Esta fuerza transferida puede efectuar trabajo sobre el conductor como un todo. Mientras este hecho provee una introducción razonable al comportamiento de conductores que transportan corriente en máquinas eléctricas, ciertas consideraciones esenciales han sido omitidas. No se mencionó, ni se mencionará en la sección 10.4, la fuente de corriente y la energía que se requiere para mantener una corriente constante I. La ley de inducción de Faraday (sección 12.3) no se aplicó. En la teoría de las máquinas eléctricas el resultado estará modificado por estas consideraciones. Los conductores en movimiento en campos magnéticos se tratarán en el capítulo 12. Ver, en particular, los problemas 12.13 y 12.16.

EJEMPLO 4: Halle la fuerza ejercida sobre un conductor de longitud 0.30 m que transporta una corriente de 5.0 A en dirección $-\mathbf{a}_z$, donde el campo es $\mathbf{B} = 3.50 \times 10^{-3}(\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y)$ T.

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= I(\mathbf{L} \times \mathbf{B})\\ &= (5.0)[(0.30)(-\mathbf{a}_z) \times 3.50 \times 10^{-3}(\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y)]\\ &= 7.42 \times 10^{-3}\left(\frac{-\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y}{\sqrt{2}}\right) \text{N}\end{aligned}$$

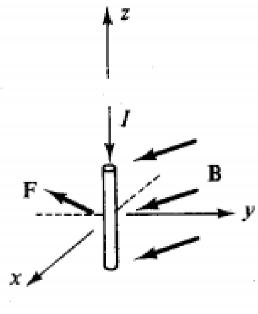


Fig. 10-3

La fuerza de magnitud 7.42 mN, se ejerce en ángulos rectos tanto respecto del campo **B** como de la dirección de la corriente, como se muestra en la figura 10-3.

10.4 TRABAJO Y POTENCIA

Las fuerzas magnéticas que se ejercen sobre las partículas cargadas y los conductores de corriente que se examinaron anteriormente, son el resultado de los campos. Para contrarrestar estas fuerzas y establecer el equilibrio, fuerzas iguales y opuestas, $\mathbf{F}_a$, deben aplicarse. Si hay movimiento, el trabajo hecho sobre el sistema por el agente externo que aplica la fuerza se da por la integral

$$W = \int_{\text{I inicial}}^{\text{I final}} \mathbf{F}_a \cdot d\mathbf{l}$$

Un resultado positivo de la integración indica que el trabajo fue efectuado por el agente sobre el sistema para mover las partículas o el conductor de su localización inicial a la final en contra del campo. Como la fuerza magnética, y en consecuencia $\mathbf{F}_a$, es generalmente no conservativa, la trayectoria entera de integración que une las localizaciones inicial y final del conductor deben estar especificadas.

EJEMPLO 5: Halle el trabajo y la potencia que se requiere para mover el conductor que aparece en la figura 10-4 en una revolución completa en la dirección mostrada en 0.02 s, si $\mathbf{B} = 2.50 \times 10^{-3}\mathbf{a}_r$ T y la corriente es 45.0 A.

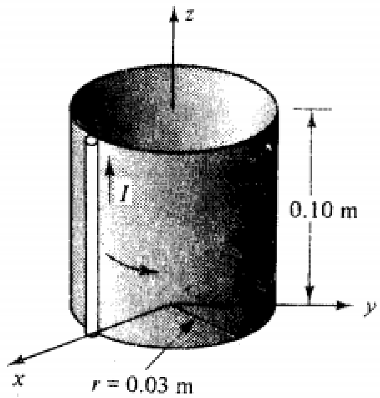


Fig. 10-4

$$\mathbf{F} = I(\mathbf{l} \times \mathbf{B}) = 1.13 \times 10^{-2}\mathbf{a}_\phi \text{ N}$$

y así $\mathbf{F}_a = -1.13 \times 10^{-2}\mathbf{a}_\phi$ N.

$$W = \int \mathbf{F}_a \cdot d\mathbf{l}$$

$$= \int_0^{2\pi} (-1.13 \times 10^{-2})\mathbf{a}_\phi \cdot r\,d\phi\,\mathbf{a}_\phi$$

$$= -2.13 \times 10^{-3} \text{ J}$$

y $P = W/t = -0.107$ W.

El signo negativo significa que el trabajo realizado por el campo magnético para mover el conductor tiene la dirección de la figura. Para el movimiento en la dirección opuesta, los límites invertidos proveerán el cambio de signo y no debe colocarse signo negativo en $r\,d\phi\,\mathbf{a}_\phi$.

10.5 TORQUE

El *momento de una fuerza* o *torque* respecto de un punto dado es el producto cruz del *brazo de palanca* de ese punto y de la fuerza. El brazo de palanca, **r**, se dirige desde el punto para el que se calcula el torque hasta el punto de aplicación de la fuerza. En la figura 10-5 la fuerza en P tiene un torque con relación a O dado por

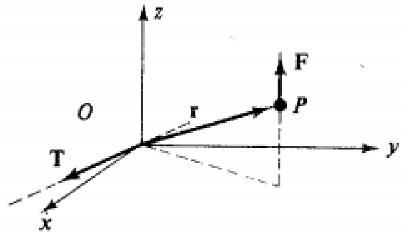


Fig. 10-5

$$\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

donde **T** tiene las unidades N · m (se han propuesto las unidades N · m/rad para distinguir el torque de la energía.)

En la figura 10-5, **T** yace a lo largo de un eje (en el plano xy) que pasa por O. Si P estuviera unido a O por una barra rígida pivoteada en O, entonces la fuerza aplicada tendería a hacer rotar P alrededor de ese eje. Se dice que el torque **T** se aplica *alrededor del eje*, antes que *alrededor del punto O*.

10.6 MOMENTO MAGNETICO DE UNA BOBINA PLANAR

Considérese la bobina de espira sencilla en el plano $z = 0$ que aparece en la figura 10-6, de ancho w en la dirección x y longitud ℓ en la dirección y. El campo **B** es uniforme y tiene dirección $+x$. Las únicas fuerzas son producto de los lados ℓ de la bobina. Para el lado de la izquierda,

$$\mathbf{F} = I(\ell \mathbf{a}_y \times B\mathbf{a}_x) = -BI\ell\mathbf{a}_z$$

y para el lado de la derecha

$$\mathbf{F} = BI\ell\mathbf{a}_z$$

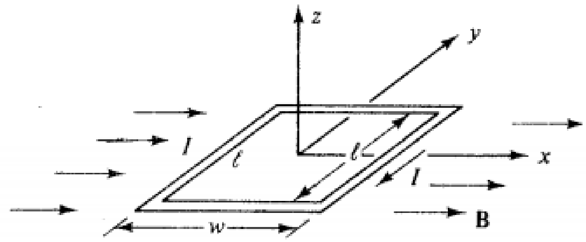


Fig. 10-6

El torque alrededor del eje y producido por el elemento de corriente de la izquierda requiere un brazo de palanca $r = -(w/2)\mathbf{a}_x$; El signo cambiará para el brazo de palanca del elemento de corriente a la derecha. El torque producido por ambos elementos es

$$\mathbf{T} = (-w/2)\mathbf{a}_x \times (-BI\ell)\mathbf{a}_z + (w/2)\mathbf{a}_x \times BI\ell\mathbf{a}_z = BI\ell w(-\mathbf{a}_y) = BI\,A(-\mathbf{a}_y)$$

donde A es el área de la bobina. Puede demostrarse que esta expresión para el torque se cumple para una bobina de forma arbitraria (y para cualquier eje paralelo al eje y).

El *momento magnético,* **m**, de una espiral planar de corriente se define como $IA\,\mathbf{a}_n$, donde la normal unitaria $\mathbf{a}_n$ está determinada por la regla de la mano derecha. (El pulgar derecho da la dirección de $\mathbf{a}_n$ cuando los dedos apuntan en dirección de la corriente.) Se ve que el torque sobre una bobina planar se relaciona con el campo aplicado por

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

Este concepto de momento magnético es esencial para entender el comportamiento de las partículas cargadas con movimiento orbital. Por ejemplo, una carga positiva Q moviéndose en una órbita circular a una velocidad U, o una velocidad angular ω, es equivalente a una corriente $I = (\omega/2\pi)Q$, y así da lugar a un momento magnético

$$\mathbf{m} = \frac{\omega}{2\pi} QA\mathbf{a}_n$$

como se muestra en la figura 10-7. Más importante que la presente discusión es el hecho de que en presencia de un campo magnético **B**, se produce un torque $\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$ que tiende a girar la espira de corriente hasta que **m** y **B** estén en la misma dirección, y en tal orientación el torque es cero.

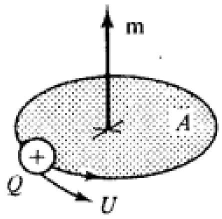


Fig. 10-7